VEREINFACHTE HERSTELLUNG DER EINSTEINSCHEN EINHEITLICHEN FELDGLEICHUNGEN

VON

DR. T. LEVI-CIVITA
PROFESSOR IN ROM

SONDERAUSGABE AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHYS.-MATH. KLASSE. 1929. IX

BERLIN 1929
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

(PREIS *RM* 2.—)

VEREINFACHTE HERSTELLUNG DER EINSTEINSCHEN EINHEITLICHEN FELDGLEICHUNGEN

VON

DR. T. LEVI-CIVITA

PROFESSOR IN ROM

SONDERAUSGABE AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
PHYS.-MATH. KLASSE. 1929. IX

BERLIN 1929
VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO

(PREIS RM 2.)

In der soeben erschienenen Abhandlung »Zur einheitlichen Feldtheorie«[1] hat Hr. EINSTEIN die grundlegende Idee verwertet, daß es möglich und zweckmäßig ist, das gesamte System der 16 Feldgleichungen (welches aus seinen berühmten Gravitationsgleichungen und den MAXWELLschen besteht) so geometrisch zu deuten, daß es die Definition (und nur die Definition) eines in der Raum-Zeit-Welt eingebetteten orthogonalen Vierbeins enthält.

Es sollen umgekehrt die 16 Bestimmungsstücke eines Vierbeins nicht nur die RIEMANNsche Metrik des Raumes, was bekanntlich zwanglos geschieht, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen vollständig definieren.

Dafür hat der hervorragende Verfasser kovariante Ableitungen in bezug auf das Vierbein eingeführt und Verknüpfungen derselben vorgeschlagen, durch die in erster Annäherung die verlangte Zuordnung geschieht.

Es scheint mir aber, daß die von EINSTEIN gestellte prinzipielle Aufgabe sich einfacher und allgemeiner lösen läßt, indem man einerseits nur ganz geläufige Hilfsmittel des absoluten Kalküls verwendet und anderseits alle früheren Resultate streng beibehält.

1. Geometrische und formale Vorbemerkungen[2].

Es seien x^ν $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ allgemeine Koordinaten eines RIEMANNschen Raumes R_n; λ_i^ν $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ die Parameter von n-Kongruenzen, die ein Liniengitter in R_n und in jedem Punkte ein n-Bein definieren.

Nach dem EINSTEINschen Muster werde ich für Koordinatenindizes (wie z. B. ν) griechische, dagegen für Beinindizes (wie i) lateinische Buchstaben gebrauchen. Summenzeichen in bezug auf griechische Indizes (insofern sie einmal oben und einmal unten vorkommen) werde ich fortlassen, nicht aber anderweitige Σ.

[1] Berliner Berichte I, 1929, S. 1—8.

[2] Vgl. insbesondere meinen Absoluten Differentialkalkül (deutsche Ausgabe von A. DUSCHEK), Berlin, Springer, 1928, Kap. III.

Es seien, wie gewöhnlich, $\lambda_{i|\nu}$ die zu λ_i^ν reziproke Elemente (normierte Unterdeterminanten). Sie bilden für jedes i ein kovariantes System (Momente des betreffenden Beines). Durch Überschiebung mit den λ_i^ν, $\lambda_{i|\nu}$ entsteht aus jedem gemischten Tensor der Stufe $p+q$ mit den Komponenten

$$A^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} \qquad (\mu_1, \cdots, \mu_p; \nu_1, \cdots, \nu_q = 0, 1, \cdots, n-1)$$

ein Beintensor, dessen Komponenten durch die Formeln

$$(1) \qquad A_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q} = A^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \lambda^{\mu_1}_{i_1} \cdots \lambda^{\mu_p}_{i_p} \lambda_{k_1|\nu_1} \cdots \lambda_{k_q|\nu_q}$$

definiert sind; und umgekehrt, indem diese Formeln in bezug auf die Koordinatenkomponenten auflösbar sind, unter der Form

$$A^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p} = \sum_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q}^{n-1} {}_{0} A_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q} \lambda_{i_1|\mu_1} \cdots \lambda_{i_p|\mu_p} \lambda^{\nu_1}_{k_1} \cdots \lambda^{\nu_q}_{k_q}.$$

Die Beinkomponenten eines Tensors sind reine Invarianten gegenüber Koordinaten-Transformationen; sie hängen wesentlich vom betrachteten n-Bein ab; sie besitzen aber, wie leicht zu bestätigen, immer noch tensoriellen Charakter bezüglich orthogonaler Transformationen, denen gleichzeitig die λ_i^μ und die $\lambda_{k|\nu}$ unterworfen werden.

Setzt man

$$(2) \qquad g_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i|\mu} \lambda_{i|\nu}, \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots, n-1)$$

so wird (im reellen Gebiete) eine definite Metrik

$$(3) \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

im R_n eingeführt, derart, daß unser n-Bein orthogonal ausfällt. Ich werde später (Nr. 3) die (unwesentlichen) Modifikationen angeben, die erforderlich sind, um, immer im reellen Gebiete, die n-Beintheorie auf eine indefinite Metrik (mit gegebenem Trägheitsindex) zu übertragen.

Indessen denke ich mir die kovarianten Ableitungen der Momenten $\lambda_{i|\nu}$ eingeführt, und, mit Ricci, die Drehungskoeffizienten

$$(4) \qquad \gamma_{ikl} = \lambda_{i|\nu;\rho} \lambda^\nu_k \lambda^\rho_l.$$

Wegen der Identitäten

$$(5) \qquad \gamma_{ikl} + \gamma_{kil} = 0$$

(welche eine Folge der Relationen zwischen Parametern und Momenten sind) hat man in den Riccischen γ, $n\frac{n(n-1)}{2}$ Invarianten gegenüber Koordinaten-Transformationen, welche selbstverständlich vom gegebenen n-Beine wesentlich abhängen und alle seine geometrischen Differentialcharaktere erster Ordnung notwendigerweise erschöpfen. In bezug auf orthogonale Transformationen mit konstanten Koeffizienten verhalten sich die γ wie ein Tensor dritter

Stufe. Um die Beschränkung auf Transformationen mit konstanten Koeffizienten zu betonen, werde ich solche Systeme als **lokale Beintensoren** bezeichnen. Echte Beintensoren verhalten sich invariant gegenüber allen orthogonalen Transformationen, deren Koeffizienten irgendwie mit den x variieren können.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu erinnern, daß die expliziten Ausdrücke der Drehungskoeffizienten γ auch direkt durch gewöhnliche Derivationen ohne vorläufigen Übergang durch die kovarianten Ableitungen der $\lambda_{i|\nu}$ sich berechnen lassen.

Dazu braucht man entweder die PFAFFschen Ausdrücke

$$\psi_i = \lambda_{i|\nu} dx^\nu$$

oder die Operatoren (Ableitungen einer Funktion $f[x^0, \cdots, x^{n-1}]$ in der Richtung der Linien der Kongruenzen)

$$\frac{df}{ds_i} = X_i f = \sum_{0}^{n-1}{}_\nu \lambda_i^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

einzuführen und die betreffenden bilinearen Kovarianten bzw. POISSONschen Klammerausdrücke zu bilden. Übrigens gelangt man noch schneller zum Ziele, indem man (4) benutzt und beachtet, daß gemäß der Definition der kovarianten Ableitungen die Identität

$$\lambda_{i|\nu\rho} - \lambda_{i|\rho\nu} = \frac{\partial \lambda_{i|\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \lambda_{i|\rho}}{\partial x^\nu}$$

besteht. Man erhält somit

$$\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk} = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu\rho} \lambda_k^\nu \lambda_l^\rho \left\{ \frac{\partial \lambda_{i|\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \lambda_{i|\rho}}{\partial x^\nu} \right\},$$

und diese Gleichungen in Verbindung mit (5) bestimmen alle γ eindeutig.

Die Gleichungen (4) lassen sich in bezug auf die $\lambda_{i|\nu\rho}$ auflösen und ergeben

$$(4') \qquad \lambda_{i|\nu\rho} = \sum_{0}^{n-1}{}_{ij} \gamma_{ijh} \lambda_{j|\nu} \lambda_{h|\rho},$$

woraus man durch nochmalige kovariante Ableitung und Differenzenbildung die Integrabilitätsbedingungen derselben (4′) bekommt.

Dazu braucht man die Kommutationsformel

$$(6) \qquad \lambda_{i|\nu\rho\tau} - \lambda_{i|\nu\tau\rho} = R_{\mu\nu,\rho\tau} \lambda_i^\mu,$$

wo $R_{\mu\nu,\rho\tau}$ den RIEMANNschen Tensor bezeichnet.

Man erhält in dieser Weise

$$(7) \qquad \gamma_{ij,hk} = R_{\mu\nu,\rho\tau} \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \lambda_h^\rho \lambda_k^\tau,$$

wenn man der Kürze halber

$$(8) \qquad \gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{ds_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{ds_h} + \sum_{0}^{n-1}{}_l [\gamma_{ijl}(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\gamma_{ljk}]$$

setzt. Aus (7) entnimmt man, daß die Vier-Indizes-γ einen (echten) Beintensor bilden. Wegen der bekannten Identitäten, die von den Riemannschen Symbolen erfüllt sind, führen die Formeln (7) zu ähnlichen Identitäten für die Vier-Indizes-γ, und zwar

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma_{ij,hk} = -\gamma_{ji,hk} = -\gamma_{ij,kh} = \gamma_{hk,ij}, \\ \gamma_{ij,hk} + \gamma_{ih,kj} + \gamma_{ik,jh} = 0. \end{cases}$$

Nun zum Einsteinschen Tensor

$$G_{\mu\tau} = R_{\mu\sigma,\varsigma\tau}\, g^{\sigma\varsigma}.$$

Seine Komponenten G_{ik}. in bezug auf die Zweibeine i, k des n-Beins, haben nach (1) den Ausdruck

$$G_{ik} = G_{\mu\tau}\lambda_i^\mu \lambda_k^\tau,$$

woraus gemäß (7)

$$(10)\quad G_{ik} = \sum_{h=0}^{n-1} \gamma_{ih,hk}.$$

Die lineare (Koordinaten- und Bein-) Invariante

$$G = G_{\mu\tau}g^{\mu\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} G_{kk}$$

nimmt folglich die Form an

$$(11)\quad G = \sum_{hk=0}^{n-1} \gamma_{kh,hk}.$$

Eine letzte Tatsache will ich noch hervorheben, nämlich die, daß aus Verjüngung von zwei Indizes in einem Beintensor ein reduzierter Tensor entsteht (m-2-ter Stufe, wenn der ursprüngliche von m-ter Stufe war).

Wie schon bemerkt, bilden die γ_{ikl} einen lokalen Beintensor dritter Stufe, und zwar wegen (5) schiefsymmetrisch in bezug auf die zwei ersten Indizes i, k. Dasselbe gilt für die Differenzen $\gamma_{lik} - \gamma_{lki}$, welche für $i, k \neq l$ Anormalitäten heißen.

Wendet man auf die Elemente $A_{(h)}$ [wo (h) für $h_1 h_2 \cdots h_m$ steht] eines (lokalen oder echten) Beintensors den Differentialoperator $\frac{d}{ds_j}$ an, so entsteht ein neuer lokaler Beintensor $\frac{dA_{(h)}}{ds_j}$, dessen Stufe um eine Einheit höher als die der ursprünglichen ist. Speziell erzeugt man in dieser Weise den lokalen Beintensor

$$\frac{d\gamma_{ikl}}{ds_j}$$

vierter Stufe, welcher in bezug auf i und k schiefsymmetrisch ist. Durch Verjüngung bekommt man

$$(12)\quad \zeta_{ik} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{d\gamma_{ikl}}{ds_l},$$

womit man augenscheinlich einen schiefsymmetrischen lokalen Beintensor ξ zweiter Stufe erzeugt hat. Seine kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten lauten:

$$(13)\qquad \xi_{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1}{}_{0} \xi_{ik} \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu}, \qquad \xi^{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1}{}_{0} \xi_{ik} \lambda_i^{\mu} \lambda_k^{\nu}.$$

Es sei außerdem erwähnt, daß die n Größen

$$(14)\qquad c_l = \sum_j^{n-1}{}_{0} \gamma_{jlj}$$

sich als mittlere Krümmungen der zum l-Bein orthogonalen Stellung interpretieren lassen. Nach dem Gesagten sind sie Bestimmungsstücke eines lokalen Beinvektors. Durch Verjüngung entsteht aus dem dreistufigen Tensor $\gamma_{lik} - \gamma_{lki}$ und diesem Vektor ein neuer lokaler Beintensor zweiter Stufe, nämlich

$$(15)\qquad \eta_{ik} = \sum_l^{n-1}{}_{0} c_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki}),$$

der ebenfalls schiefsymmetrisch ist.

2. Divergenzenbildung. Besonderer Fall $n = 4$.

Sind v^ν die kontravarianten Komponenten eines Vektors v, so ist seine Divergenz durch die Invariante definiert

$$(16)\qquad \operatorname{div} v = v^{\nu}{}_{|\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\nu^{n-1}{}_{0} \frac{\partial (\sqrt{|g|}\, v^\nu)}{\partial x^\nu}$$

wo g, wie üblich, die Determinante $\|g_{\mu\nu}\|$ bezeichnet, und ich habe $|g|$ (statt einfach g) geschrieben, weil so die Formel ohne Änderung auch für ein indefinites ds^2 gilt.

Für einen Tensor zweiter Stufe ξ mit den kontravarianten Komponenten $\xi^{\mu\nu}$ bekommt man als Divergenz einen Vektor χ mit den kontravarianten Komponenten

$$(17)\qquad \chi^\mu = \xi^{\mu\nu}{}_{|\nu}.$$

Mit Hrn. v. LAUE[1] werden wir schlechthin schreiben

$$(17')\qquad \chi = \operatorname{Div} \xi.$$

Ersetzt man darin die kovarianten Ableitungen $\xi^{\mu\nu}{}_{|\nu}$ durch ihre expliziten Werte, so bekommt man, im Falle eines schiefsymmetrischen Tensors $(\xi^{\mu\nu} + \xi^{\nu\mu} = 0)$,

$$(17'')\qquad \chi^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\nu^{n-1}{}_{0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{|g|}\, \xi^{\mu\nu}),$$

[1] Die Relativitätstheorie, Bd. II (zweite Auflage, Braunschweig, Vieweg, 1923), § 14.

woraus, wegen (16),

$$\text{(18)}\qquad \operatorname{div}\chi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{\mu\nu=0}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}\,\xi^{\mu\nu}\right).$$

Das zweite Glied verschwindet identisch wegen der Schiefsymmetrie der $\xi^{\mu\nu}$.

Man erhält also, wenn man wieder kovariante Ableitungen benutzt, die Identität

$$\chi^\mu{}_{|\mu} = \xi^{\mu\nu}{}_{|\nu\mu} = 0,$$

oder endlich, in tensorieller Schreibweise,

$$\text{(18')}\qquad \operatorname{div}(\operatorname{Div}\xi) = 0,$$

d. h. in einem beliebigen RIEMANNschen Raume ist die Divergenz der Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors zweiter Stufe identisch Null.

Um die zweiten Glieder der (16) und (17) in Beinkomponenten auszudrücken, genügt es, auf die Definitionsformeln

$$v_k = v^\nu \lambda_{k|\nu},$$
$$\xi_{ik} = \xi^{\mu\nu}\lambda_{i|\mu}\lambda_{k|\nu},$$

den Operator

$$\frac{d}{ds_l} = \lambda_l^\xi \frac{\partial}{\partial x^\xi}$$

anzuwenden. Indem man rechts die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante ersetzt (was erlaubt ist, da man mit Invarianten zu tun hat), bekommt man

$$\frac{dv_k}{ds_l} = v^\nu{}_{|\xi}\lambda_{k|\nu}\lambda_l^\xi + v^\nu\lambda_{k|\nu;\xi}\lambda_l^\xi,$$

$$\frac{d\xi_{ik}}{ds_l} = \xi^{\mu\nu}{}_{|\xi}\lambda_{i|\mu}\lambda_{k|\nu}\lambda_l^\xi + \xi^{\mu\nu}\lambda_l^\xi\left(\lambda_{i|\mu;\xi}\lambda_{k|\nu} + \lambda_{i|\mu}\lambda_{k|\nu;\xi}\right),$$

woraus, wegen (4'), (16) und (17),

$$\text{(19)}\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{dv_k}{ds_k} = \operatorname{div} v + \sum_{hk=0}^{n-1}\gamma_{khk}v_h,$$

$$\text{(20)}\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{d\xi_{ik}}{ds_k} = \chi_i + \sum_{hk=0}^{n-1}\left(\gamma_{ihk}\xi_{hk} + \gamma_{khk}\xi_{ih}\right),$$

welche die Divergenzen $\operatorname{div} v$ und $\operatorname{Div}\xi$ von Beintensoren (erster bzw. zweiter Stufe) direkt durch Beinkomponenten und Beinoperationen darstellen.

Für $n = 4$ hat man einen vierstufigen elementaren Tensor zur Verfügung, nämlich das bekannte RICCIsche ε-System, dessen kovariante bzw. kontravariante Komponenten

$$\varepsilon_{\mu\nu\xi\tau},\qquad \varepsilon^{\mu\nu\xi\tau}$$

gleich Null sind, wenn die vier Indizes nicht alle verschieden sind. Die übrigen Komponenten haben die Werte $\pm\sqrt{|g|}$ bzw. $\pm\frac{1}{\sqrt{|g|}}$, je nachdem die Permutation $(\mu\nu\rho\sigma)$ in bezug auf (0123) gerade oder ungerade ist.

Es sei wiederum ξ mit den kontravarianten Komponenten $\xi^{\nu\rho}$ ein schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Setzt man

(21) $$p_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\xi^{\nu\rho|\sigma}$$

was mit

(21') $$p^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\xi_{\nu\rho|\sigma},$$

oder in der v. LAUEschen Bezeichnung mit

(21'') $$\boldsymbol{p} = \mathrm{Div}\,{}^*\xi$$

gleichbedeutend ist, so wird es berechtigt, den Vektor $\boldsymbol{p}$ mit den obigen kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten PFAFFsche Divergenz von ξ zu nennen, weil die p^μ identisch verschwinden, dann und nur dann, wenn die $\xi_{\nu\rho}$ mit den Koeffizienten des bilinearen Kovarianten eines PFAFFschen Ausdruckes $\phi_\nu dx^\nu$ zusammenfallen. Dies ergibt sich am einfachsten, wenn man in (21') die kovarianten Ableitungen $\xi_{\nu\rho|\sigma}$ durch ihre expliziten Werte ersetzt, und beachtet, daß wegen der Schiefsymmetrie der $\xi_{\nu\rho}$ nur

(21''') $$p^\mu = \sum_{\nu\rho\sigma}^{3}{}_{0}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial\xi_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}$$

bleibt. Offenbar verschwinden die zweiten Glieder, wenn die $\frac{\partial\xi_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}$ durch die Differenzen $\frac{\partial^2\phi_\nu}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}-\frac{\partial^2\phi_\rho}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}$ ersetzt werden.

Indem man den Ausdruck (21''') der p^μ in die zweite Form (16) der Divergenz eines Vektors einführt, bekommt man ohne weiteres $\mathrm{div}\,\boldsymbol{p} = 0$, was mit Rücksicht auf (21'')

(22) $$\mathrm{div}\,(\mathrm{Div}\,{}^*\xi) = 0$$

geschrieben werden kann, d. h. die Divergenz der PFAFFschen Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors zweiter Stufe in R_4 verschwindet identisch.

Ferner wollen wir den Vektor $\boldsymbol{p}$ (PFAFFsche Divergenz) direkt durch die Beinkomponenten

$$\xi_{ik} = \xi_{\mu\nu}\lambda_i^\mu\lambda_k^\nu$$

des gegebenen Tensors darstellen. Es empfiehlt sich, dafür von den soeben geschriebenen Gleichungen in aufgelöster Form

$$\xi_{\nu\rho} = \sum_{hk}^{3}{}_{0}\,\xi_{hk}\,\lambda_{h|\nu}\,\lambda_{k|\rho}$$

auszugehen und die $\xi_{\nu\rho|\sigma}$ durch kovariante Ableitung des zweiten Gliedes zu berechnen.

Wegen

$$\xi_{hk|\tau} = \sum_{l}^{3} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} \lambda_{l|\tau}$$

und (4′) bekommt man

$$\xi_{\nu\xi|\tau} = \sum_{hkl}^{3} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} \lambda_{h|\nu} \lambda_{k|\xi} \lambda_{l|\tau} + \sum_{kjl}^{3} \xi_{hk} \lambda_{l|\tau} \{\gamma_{hjl} \lambda_{j|\nu} \lambda_{k|\xi} + \gamma_{kjl} \lambda_{j|\xi} \lambda_{h|\nu}\},$$

und folglich, nach (21′),

$$\begin{aligned} p_i = p^\mu \lambda_{i|\mu} &= \varepsilon^{\mu\nu\xi\tau} \xi_{\nu\xi|\tau} \lambda_{i|\mu} \\ &= \sum_{hkl}^{3} \varepsilon_{ihkl} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + \sum_{jhkl}^{3} \xi_{hk} (\varepsilon_{ijkl} \gamma_{hjl} + \varepsilon_{ihjl} \gamma_{kjl}) \\ &= \sum_{hkl}^{3} \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + \sum_{j}^{3} (\gamma_{jhl} \xi_{jk} + \gamma_{jkl} \xi_{hj}) \right\} \end{aligned}$$

wo man zur Abkürzung

(23) $$\varepsilon_{ihkl} = \varepsilon^{\mu\nu\xi\tau} \lambda_{i|\mu} \lambda_{h|\nu} \lambda_{k|\xi} \lambda_{l|\tau} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} \lambda_{0|0} & \lambda_{0|1} & \lambda_{0|2} & \lambda_{0|3} \\ \lambda_{1|0} & \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \lambda_{1|3} \\ \lambda_{2|0} & \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \lambda_{2|3} \\ \lambda_{3|0} & \lambda_{3|1} & \lambda_{3|2} & \lambda_{3|3} \end{vmatrix}$$

gesetzt hat. Diese ε_{ihkl} sind somit Null, wenn zwei der vier Indizes untereinander gleich sind. Wenn dagegen $ihkl$ eine Permutation der Zahlen 0123 darstellt, so hat ε_{ihkl} den Wert ± 1, je nachdem die Klasse der Substitution $\begin{pmatrix} ihkl \\ 0123 \end{pmatrix}$ gerade oder ungerade ist. Demzufolge erkennt man, daß in dem soeben erhaltenen Ausdruck der p_i die zwei letzten Glieder gleich sind. So bekommt man schließlich

(24) $$p_i = \sum_{hkl}^{3} \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + 2 \sum_{j}^{3} \gamma_{jhl} \xi_{jk} \right\}.$$

3. Umformungen für eine indefinite Metrik.

Nach EISENHART[1] lassen sich alle Formeln der n-Beintheorie in sehr übersichtlicher Weise auf indefinite Maßbestimmungen übertragen, ohne das reelle Gebiet, sei es nur vorläufig, zu verlassen.

Faßt man ein indefinites

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ins Auge, so nennt man bekanntlich eine (reelle) Richtung dx^ν **zeitartig** oder **raumartig**, je nachdem das entsprechende $ds^2 > $ oder < 0 ausfällt; Nullrichtungen sind die ∞^{n-2}, für welche $ds^2 = 0$ wird.

[1] Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926, Chap. III.

Parameter einer eigentlichen (d. h. nicht Null-) Richtung nennt man jedenfalls die Verhältnisse

$$\lambda^\nu = \frac{dx^\nu}{|ds|} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$$

Man hat somit

(25) $$g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = \frac{ds^2}{|ds^2|} = \pm 1 = e,$$

indem man von jetzt an mit e die positive oder negative Einheit bezeichnet.

Als **Momente** einer gegebenen Richtung führt man, wie im definiten Falle, die kovarianten Größen

(26) $$\lambda_\nu = g_{\mu\nu}\lambda^\mu$$

ein, so daß die quadratische Identität (25) die Form

(27) $$\lambda_\nu\lambda^\nu = e$$

annimmt.

Sind λ_i^ν $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ die Parameter eines orthogonalen n-Beins, welches aus lauter eigentlichen Richtungen besteht, so hat man wegen der Orthogonalität

$$\lambda_{i|\nu}\lambda_k^\nu = 0, \qquad (i \neq k)$$

und außerdem, wegen (27),

$$\lambda_{i|\nu}\lambda_i^\nu = \pm 1 = e_i.$$

Die Gesamtzahl der negativen (und folglich auch der übrigbleibenden positiven) e_i ist für ein gegebenes ds^2 stets gleich seinem Trägheitsindex und somit immer dieselbe, welches auch das betrachtete (eigentliche) n-Bein sei.

Die zwei soeben geschriebenen Relationsgruppen zwischen Parametern und Momenten eines n-Beins können mit der üblichen Bezeichnung der Symbole δ_{ik} in die einzige Formel

(28) $$\lambda_i^\nu\lambda_{k|\nu} = e_k\delta_{ik} = e_i\delta_{ik}$$

zusammengefaßt werden; oder, wegen $e_k^2 = 1$,

$$\lambda_i^\nu e_k\lambda_{k|\nu} = \delta_{ik}.$$

Wir entnehmen hieraus, daß die reziproken Elemente zu den Parametern λ_i^ν nicht gerade die Momente $\lambda_{i|\nu}$ sind, sondern $e_i\lambda_{i|\nu}$. Ebenso sind $e_i\lambda_i^\nu$ die reziproken Elemente der Momente $\lambda_{i|\nu}$. Wenn man die Gleichungen (26) für alle Beine geschrieben denkt, so hat man (indem man den Summenindex mit ρ bezeichnet)

$$\lambda_{i|\nu} = g_{\rho\nu}\lambda_i^\rho.$$

Durch Multiplikation mit $e_i\lambda_{i|\mu}$ und Summierung in bezug auf i bekommt man

(2)* $$g_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i\lambda_{i|\mu}\lambda_{i|\nu},$$

welche die Formel (2) des definiten Falles ersetzt, usw.

Nunmehr darf ich mich auf ganz kurze Hinweise beschränken. Überhaupt werde ich nur die Formeln hinschreiben, die nicht durchaus unverändert bleiben. Sie werden mit * behaftet sein und dieselbe Nummer der entsprechenden, sich auf eine definite Metrik beziehenden, bekommen.

Erstens, Beinkomponenten irgendeines gegebenen Tensors und Rotationskoeffizienten γ_{ikl} sind jedenfalls durch die Definitionsgleichungen (1) und (4) einzuführen; dagegen werden die aufgelösten Ausdrücke der $\lambda_{i|\nu\xi}$ im allgemeinen:

$$(4')^* \qquad \lambda_{i|\nu\xi} = \sum_{0}^{n-1}{}_{jh} \gamma_{ijh}\, e_j\, e_h\, \lambda_{j|\nu}\, \lambda_{h|\xi}$$

Die kovarianten Gleichungen (6) sowie die Definitionsgleichungen (7) der Vier-Indizes-γ gelten unbedingt. Nur die Beintensorausdrücke der $\gamma_{ij,hk}$ erleiden eine kleine Modifikation. Es ist nämlich allgemein zu setzen:

$$(8)^* \quad \gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{ds_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{ds_h} + \sum_{0}^{n-1}{}_l e_l \left| \gamma_{ijl}(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\gamma_{ljk} \right|.$$

Selbstverständlich sind diese Größen zufolge der Gleichungen (7) immer noch durch die Relationen (9) verknüpft.

Wesentlich ist doch, zu beachten, daß der lokale Übergang von einem zu einem anderen n-Beine keiner orthogonalen Transformation entspricht, sondern einer pseudoorthogonalen, d. h. einer solchen, welche die quadratische Form

$$Q(z) = \sum_{0}^{n-1}{}_i e_i z_i^2$$

invariant läßt. Die Koeffizienten α_{ik} einer solchen pseudo-orthogonalen Transformation erfüllen somit die Bedingungen

$$\sum_{0}^{n-1}{}_l e_l \alpha_{il} \alpha_{kl} = \sum_{0}^{n-1}{}_l e_l \alpha_{li} \alpha_{lk} = \delta_{ik}.$$

Aus der Forderung, die Form $Q(z)$ invariant zu lassen, folgt unmittelbar der allgemeinste Ausdruck, welcher den Koeffizienten α_{ik} zukommt im Falle infinitesimaler pseudoorthogonaler Transformationen. Man hat nur

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} + e_i \beta_{ik}$$

zu setzen, und die β_{ik} als unendlich kleine Größen zu betrachten. Führt man in Q die Substitution

$$(29) \qquad z_i = \sum_{0}^{n-1}{}_k \alpha_{ik} z'_k = z'_i + e_i \sum_{0}^{n-1}{}_k \beta_{ik} z'_k$$

aus, und verlangt, daß $Q(z')$ die Form $\sum_{0}^{n-1}{}_i e_i z_i'^2$ beibehält, so bekommt man (wie im Falle von rein orthogonalen Substitutionen) gerade die Bedingung der Schiefsymmetrie:

$$(30) \qquad \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0.$$

Die Bestimmungsstücke eines Beintensors sind Zahlensysteme, welche gegenüber pseudoorthogonalen Transformationen sich wie Tensoren verhalten; für lokale Beintensoren gilt dieses Verhalten nur gegenüber pseudoorthogonaler Transformationen mit konstanten Koeffizienten. Die Operatoren

$$\frac{df}{ds_i} = X_i f = \sum_0^{n-1} {}_\nu \lambda_i^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

verhalten sich wie Beinvektoren.

Wenn (i) und (k) irgendwelche Beinindizesgruppen bezeichnen und $A_{(i)j}$. $B_{(k)l}$ zwei lokale Beintensoren, so wird die Verjüngung in bezug auf j. l durch die Formel definiert

$$\sum_0^{n-1} {}_l e_l A_{(i)l} B_{(k)l} .$$

Dementsprechend bekommt man statt (10) und (11)

$$G_{ik} = \sum_0^{n-1} {}_h e_h \gamma_{ih,hk} . \tag{10*}$$

$$G = \sum_0^{n-1} {}_{hk} e_h e_k \gamma_{kh,hk} . \tag{11*}$$

Weiter müssen die Formeln (12), (14) und (15) durch

$$\xi_{ik} = \sum_0^{n-1} {}_l e_l \frac{d\gamma_{ikl}}{ds_l} \tag{12*}$$

$$c_l = \sum_0^{n-1} {}_j e_j \gamma_{jlj} \tag{14*}$$

und

$$\varphi_{ik} = \sum_0^{n-1} {}_l e_l c_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki}) \tag{15}$$

ersetzt werden, während die Ausdrücke (13) von kovarianten und kontravarianten Komponenten durch die Beinkomponenten ξ_{ik} aus der allgemeingültigen Definition (1) der Beinkomponenten eines Tensors zu entnehmen sind. Sie werden folglich

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi_{\mu\nu} &= \sum_0^{n-1} {}_{ik} \xi_{ik} e_i e_k \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu} \\ \xi^{\mu\nu} &= \sum_0^{n-1} {}_{ik} \xi_{ik} e_i e_k \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu . \end{aligned} \right.$$

Da die Verjüngung von pseudoorthogonalen Beintensoren durch Hinzufügung des Faktors e mit dem betreffenden Index geschieht, so ist es ohne weiteres ersichtlich, daß die (19), (20) und (24) die Form annehmen

(19)* $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \sum_{0}^{n-1}{}_{k}\, e_k \frac{dv_k}{ds_k} - \sum_{0}^{n-1}{}_{hk}\, e_h e_k \gamma_{khh} v_h,$$

(20)* $$\chi_i = \sum_{0}^{n-1}{}_{k}\, e_k \frac{d\xi_{ik}}{ds_k} - \sum_{0}^{n-1}{}_{hk}\, e_h e_k (\gamma_{ihk} \xi_{hk} + \gamma_{khk} \xi_{ih}),$$

(24)* $$p_i = \sum_{0}^{3}{}_{hkl}\, e_h e_k e_l \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + 2 \sum_{0}^{3}{}_{j}\, e_j \gamma_{jhl} \xi_{jk} \right\}.$$

Selbstverständlich bleiben die Gleichungen (18′) und (22), d. h. zusammen

(31) $$\operatorname{div} (\operatorname{Div} \xi) = 0. \qquad \operatorname{div} (\operatorname{Div}^* \xi) = 0.$$

welche invariante Eigenschaften ausdrücken, stets gültig.

4. Gravitationsgleichungen.

Die kovarianten Komponenten des Energietensors seien, wie üblich, durch $T_{\mu\nu}$ bezeichnet. Läßt man Einwirkungen von irgendwelchem Ursprung zu, so sind diese $T_{\mu\nu}$ in zwei Anteile zerlegt zu denken, von denen der eine $\tau_{\mu\nu}$ rein elektromagnetisch ist, und der andere $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ den etwaigen Rest darstellt. Wir setzen somit

(32) $$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \mathrm{T}_{\mu\nu},$$

wo τ der bekannte Maxwellsche Tensor ist; ferner ist natürlich $\mathrm{T}_{\mu\nu} = 0$ im Vakuum.

Die Einsteinschen Gleichungen (ohne kosmologisches Glied) lauten bekanntlich

$$G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu},$$

wo die Proportionalitätskonstante $\varkappa$ sich durch die Gravitationskonstante f und die Lichtgeschwindigkeit c ausdrücken läßt $\left(\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}\right)$.

Führt man gemäß den Formeln

$$G_{ik} = G_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu,$$
$$T_{ik} = T_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu \text{ usw.}$$

die entsprechenden Beintensoren ein, so hat man einerseits aus (32)

(32′) $$T_{ik} = \tau_{ik} + \mathrm{T}_{ik},$$

und hauptsächlich die Gravitationsgleichungen in beintensorieller Form[1]

(I) $$G_{ik} - \tfrac{1}{2} \delta_{ik} G = -\varkappa T_{ik}, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

wo gemäß (10)* und (11)*

$$G_{ik} = \sum_{0}^{3}{}_{h}\, e_h \gamma_{ih,hk}, \qquad G = \sum_{0}^{3}{}_{k}\, e_k G_{kk} = \sum_{0}^{3}{}_{hk}\, e_h e_k \gamma_{kh,hk}.$$

[1] Sie wurden seit 1918 von Cisotti (Rend. Acc. Lincei, Vol. XXVII, S. 366—371) angegeben, doch mit Beschränkung auf die (imaginäre) Schreibweise (8), (10), (11).

Da die zugrunde zu legende Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie eine indefinite Metrik mit Trägheitsindex 3 besitzt, so ist genau

$$(33) \qquad e_0 = 1\,, \qquad e_1 = e_2 = e_3 = -1$$

zu setzen.

Die $\gamma_{ij,hk}$ sind durch die Gleichungen (8)* als Gitterdifferentialelemente zweiter Ordnung eingeführt. Ihre Kombinationen G_{ik} haben Tensorcharakter gegenüber allen pseudoorthogonalen, d. h. im gegenwärtigen Falle LORENTZschen, Transformationen (auch wenn man die Koeffizienten irgendwie mit der Stelle variieren läßt).

Die 10 Gleichungen (I) bevorzugen demnach, wie übrigens von vornherein ersichtlich, in Rücksicht auf ihre ursprüngliche Form, kein besonderes Vierbein. Sie gelten unter derselben Gestalt für irgendwelche orthogonale Vierbeine des relativistischen R_4 und dienen bekanntlich zur Festlegung ihrer Metrik.

Da sie doch jedenfalls 10 Relationen zwischen den 16 Parametern λ_i^ν liefern, so braucht man nur dieselben durch 6 weitere, vernünftig gewählten Bedingungen zu verbinden, um unter allen möglichen Vierbeinen und zugehörigen Gittern ein spezielles, das Weltgitter zu charakterisieren.

Wir werden demnächst (Nr. 6) diesen letzten Schritt ausführen, welcher übrigens der einzige wesentliche ist. Indessen wird es angemessen sein, die MAXWELLschen Gleichungen in geeigneter Kleidung vorauszuschicken.

5. Elektromagnetische Gleichungen.

Es seien $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$, F_{ik} die (bzw. kovarianten, kontravarianten Bein-) Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors $\boldsymbol{F}$, welcher das elektromagnetische Feld in der Raum-Zeit-Welt bestimmt; $\boldsymbol{S}$ (Vektor) der Viererstrom, S_μ usw. seine Komponenten, wobei alles in sog. rationellen Einheiten gemessen zu verstehen ist.

Die MAXWELLschen Gleichungen (wie sie seit EINSTEIN in der allgemeinen Relativitätstheorie eingebürgert sind) lauten dann:

$$(34) \qquad \operatorname{Div} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}, \qquad \operatorname{Div}^* \boldsymbol{F} = 0\,.$$

Jede Gruppe enthält vier Gleichungen, so daß auf den ersten Blick man deren Anzahl als 8 erklären würde. Es ist aber notwendigerweise $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0$, so daß nach (31) zwei identische Relationen bestehen, nämlich das Verschwinden der betreffenden Divergenzen. Zwei Gleichungen des Systems (34) können somit (unter gehörigen Nebenbedingungen) als Folge der 6 übrigen betrachtet werden; und tatsächlich weiß man, daß, wenn man $\boldsymbol{S}$ als gegeben oder anderweitig mit dem Tensor $\boldsymbol{F}$ verbunden ansieht, dann die Gleichungen (34) nichts anderes als die eindeutige Bestimmung der sechs Komponenten von $\boldsymbol{F}$ für $x^0 + dx^0$ aus ihren Werten für ein gegebenes x^0 (und irgendwelche x^1, x^2, x^3) enthalten.

Wir brauchen noch den symmetrischen Energiespannungstensor explizit hinzuschreiben. Bekanntlich sind seine kovarianten Komponenten folgendermaßen definiert:

$$\tau_{\mu\nu} = -g^{\varrho\sigma} F_{\mu\varrho} F_{\nu\sigma} + \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma}.$$

Durch Überschiebung mit $\lambda_i^\mu \lambda_k^\nu$ (indem man rechts $g^{\varrho\sigma}$ durch $\sum_l^{3} e_l \lambda_l^\varrho \lambda_l^\sigma$ und $F^{\varrho\sigma}$ durch $\sum_{jh}^{3} e_j e_h F_{jh} \lambda_j^\varrho \lambda_h^\sigma$ ersetzt) erhalten wir die gewünschte Beintensorformel:

(35) $$\tau_{ik} = -\sum_l^{3} e_l F_{il} F_{kl} + \tfrac{1}{4} \delta_{ik} \sum_{jh}^{3} e_j e_h F_{jh}^2 .$$

6. Deutung des elektromagnetischen Tensors im Weltgitter. Rein geometrische Formulierung der Feldgleichungen.

Wir dürfen a priori durchaus willkürlich die sechs Beinkomponenten F_{ik} des elektromagnetischen Feldes mit irgendwelchen geometrischen Eigenschaften eines (daraus zu bestimmenden) Vierbeins des R_4 verknüpfen. Am einfachsten bewirkt man dies, indem man die F_{ik} proportional zu den entsprechenden Elementen eines (differentialen) schiefsymmetrischen lokalen Beintensors setzt, z. B. zu den durch die Gleichungen

(12)* $$\xi_{ik} = \sum_l^{3} e_l \frac{d\gamma_{ikl}}{ds_l}$$

oder

(15)* $$\nu_{ik} = \sum_l^{3} e_l e_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki})$$

der Nr. 3 definierten differentialen Ausdrücken zweiter bzw. erster Ordnung.

Das zweckmäßigste ist, wie wir sehen werden, sich an die erste Wahl zu halten und dementsprechend

(A) $$F_{ik} = \upsilon\, \xi_{ik}$$

zu setzen, wo υ eine Konstante bedeuten soll.

Da die Riccischen Drehungskoeffizienten γ_{ikl} nichts anderes als Verhältnisse zwischen einem Winkel und einer Länge sind, so besitzen die ξ_{ik} Dimensionsformel l^{-2}. Dagegen verhalten sich die F_{ik} wie die Quadratwurzel einer Energiedichte. Folglich hat man

$$[F_{ik}] = l^{-\frac{1}{2}}\, t^{-1}\, m^{\frac{1}{2}}.$$

Der Proportionalitätsfaktor υ hat daher die Dimensionen

$$l^{\frac{3}{2}}\, t^{-1}\, m^{\frac{1}{2}}$$

einer elektrischen Ladung e und mag dementsprechend unter der Form

(36) $$\upsilon = \mathfrak{z} e$$

geschrieben werden, wo der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{z}$ nunmehr eine reine Zahl ist. Übrigens ist es gleichfalls berechtigt, in (36), statt e, irgendeine andere Größe, welche dieselben Dimensionen besitzt, erscheinen zu lassen: z. B. kann man setzen

$$\upsilon = \mathfrak{z}_1 \sqrt{hc}, \tag{36'}$$

wo h die PLANCKsche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume und $\mathfrak{z}_1$ eine reine Zahl bezeichnen.

Die endgültigen geometrischen Gleichungen, die aus dem MAXWELLschen System (34) und unserem Ansatz (A) entspringen, lauten demnach

$$\mathrm{Div}\,\xi = \frac{1}{\upsilon}\,\mathbf{S}, \quad \mathrm{Div}^*\,\xi = 0, \tag{II}$$

wo unter ξ der lokale Beintensor (12)* zu verstehen ist. Schließlich ist also die geometrische Bestimmung des zum Felde gehörigen Vierbeins (Weltgitters) aus den beiden Systemen (I) und (II) zu entnehmen, die zusammen (anscheinend zwar 18, aber wesentlich nur) 16 Differentialgleichungen (zweiter bzw. dritter Ordnung) in den 16 Beinparametern λ_{i}^{j} bilden.

7. Fall des leeren Raumes — Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes.

Im leeren Raume ($\mathrm{T}_{ik} = 0$, $\mathbf{S} = 0$) reduziert sich (I) wegen (32) auf die Form

$$G_{ik} - \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\,G = -\varkappa\,\tau_{ik}, \tag{I'}$$

wo gemäß (35) und (A) das zweite Glied den Wert

$$\tau_{ik} = -\upsilon^2 \sum_{0}^{3}{}_{l}\, e_l\,\xi_{il}\,\xi_{kl} + \tfrac{1}{4}\upsilon^2\,\delta_{ik} \sum_{0}^{3}{}_{jh}\, e_j\,e_h\,\xi_{jh}^2 \tag{35'}$$

hat. Das System (II) wird seinerseits

$$\mathrm{Div}\,\xi = 0. \qquad \mathrm{Div}^*\,\xi = 0. \tag{II'}$$

Wenn nicht nur der äußere Energietensor T_{ik}, sondern auch das elektromagnetische Feld verschwindet, so sind nach dem fundamentalen Ansatze (A) auch die ξ_{ik}, und mithin wegen (35') ebenfalls die τ_{ik} gleich Null. Geschieht das überall in der Raum-Zeit-Welt, so weiß man[1], daß die Gleichungen (I'), welche einfacher $G_{ik} = 0$ werden, notwendigerweise nach sich ziehen, daß die Metrik des Raumes euklidisch oder richtiger pseudoeuklidisch ist.

Was ist nun in diesem Grenzfalle die geometrische Bedeutung der Abwesenheit von elektromagnetischen Erscheinungen, d. h. der Gleichungen

$$\xi_{ik} = 0\,? \tag{37}$$

[1] Vgl. SERINI, Rend. Acc. Lincei, Vol. XXVII, 1918, S. 235—238.

Sie besagen einfach, daß das Weltgitter kartesisch oder richtiger pseudokartesisch ist.

Um den Beweis möglichst rasch geben zu können, werde ich nur Vierbeine betrachten, die unendlich kleine Abweichungen von einem pseudokartesischen Gitter aufweisen.

Wenn man speziell die x^ν als kartesische, sich gerade auf diesem Gitter beziehende Koordinaten auffaßt, so hat man für die Parameter des entsprechenden Vierbeins

$$\lambda_i'^\nu = \delta_{i\nu}\,.$$

Es seien λ_i^ν diejenigen irgendeines benachbarten Vierbeins. Da der Übergang von den $\lambda_i'^\nu$ zu den λ_i^ν einer infinitesimalen pseudoorthogonalen Transformation entspricht, so müssen nach (29) die λ_i^ν sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$(38) \qquad \lambda_i^\nu = \delta_{i\nu} + e_i \sum_{k=0}^{3} \beta_{ik}\,\delta_{k\nu} = \delta_{i\nu} + e_i \beta_{i\nu}\,,$$

wo die β_{ik} einen schiefsymmetrischen Beintensor bilden. Hieraus kann man die reziproken Elemente unmittelbar berechnen. In erster Annäherung findet man

$$e_i \lambda_{i|\nu} = \delta_{i\nu} + e_\nu \beta_{i\nu}\,.$$

und folglich durch Multiplikation mit e_i

$$(38') \qquad \lambda_{i|\nu} = \delta_{i\nu} e_i + e_i e_\nu \beta_{i\nu}\,.$$

Andererseits, wenn man von unendlich kleinen Größen überhaupt absieht, reduzieren sich die Operatoren

$$\frac{d}{d s_l} = \sum_{\nu=0}^{3} \lambda_l^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

auf die einfache Form

$$\frac{\partial}{\partial x^l}$$

und die kovarianten Ableitungen auf die gewöhnlichen.

Die Definition (4) der Drehungsinvarianten γ gibt somit (bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung)

$$\gamma_{ikl} = e_i e_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial x^l}\,,$$

und man bekommt weiter aus (12)*

$$\xi_{ik} = e_i e_k \sum_{l=0}^{3} e_l \frac{\partial^2 \beta_{ik}}{(\partial x^l)^2}$$

Der Differentialoperator $\sum_{l=0}^{3} e_l \frac{\partial^2 \beta_{ik}}{(\partial x^l)^2}$ ist nichts anderes als der d'Alembertsche (oder Lorentzsche) $\Box$. Die Gleichungen (37) nehmen daher die Form an

$$(37') \qquad \Box \beta_{ik} = 0\,,$$

und unter passenden Anfangs- und Grenzbedingungen ergeben sie genau

$$\mathfrak{S}_{ik} = 0,$$

d. h. den kartesischen (richtiger pseudokartesischen) Charakter des Weltgitters. Ich glaube, daß gerade dieser Schluß unseren Ansatz (A) rechtfertigt. Hätten wir etwa

$$F_{ik} = \upsilon' \eta_{ik} \qquad (\upsilon' = \text{konst.})$$

mit den Ausdrücken (15)* der η_{ik} gesetzt, so würden wir nichts Befriedigendes bekommen haben.

Ein allgemeinerer Ansatz, wie z. B.

$$F_{ik} = \upsilon \xi_{ik} + \upsilon' \eta_{ik},$$

würde dagegen komplizierter, aber in logischer Hinsicht ebenso zulässig wie (A) sein. In erster Annäherung bekommt man sogar dasselbe, weil die η von höherer Ordnung als die ξ sind.

Ausgegeben am 23. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.